

ĐẠI SỐ

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

1. Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ với $a \neq 0$

Cách giải:

Bước 1: Rút gọn về đúng dạng $ax^2 + bx + c = 0$ với $a \neq 0$.

Xác định các hệ số a, b, c .

Bước 2: Tính Δ bằng công thức:

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Bước 3: Với Δ đã tính ở trên, ta kết luận theo một trong các trường hợp tương ứng sau:

*) Vì $\Delta > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{hoặc}$$

*) Vì $\Delta = 0$ nên phương trình có nghiệm kép :

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} \quad \text{hoặc}$$

*) Vì $\Delta < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 1: Giải phương trình $8x^2 - 3x - 5 = x^2 - 2x$

Bước 1: $8x^2 - 3x - 5 = x^2 - 2x$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 3x - 5 - x^2 + 2x = 0 \quad (\text{Chuyển vế})$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 - x - 5 = 0 \quad (\text{rút gọn})$$

Có $a = 7; b = -1; c = -5$

Bước 2: Tính $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.(7).(-5) = 141 > 0$

Bước 3: Vì $\Delta > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{141}}{2.7} = \frac{1 + \sqrt{141}}{14}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{141}}{2.7} = \frac{1 - \sqrt{141}}{14}$$

Bài tập tự rèn luyện

Bài 1: Giải phương trình $13x^2 + 20x + 1 = 18x^2 + 4x$

2. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt, có nghiệm kép, vô nghiệm.

a. Định m để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt:

Cách giải:

Bước 1: Xác định các hệ số a, b, c.

Bước 2: Tính $\Delta = b^2 - 4ac$

Bước 3: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ hoặc $a.c < 0$.
Giải tìm m

Bước 4: Kết luận.

b. Định m để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm kép:

Cách giải:

Bước 1: Xác định các hệ số a, b, c.

Bước 2: Tính $\Delta = b^2 - 4ac$

Bước 3: Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$. Giải tìm m

Bước 4: Kết luận

c. Định m để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm:

Cách giải:

Bước 1: Xác định các hệ số a, b, c.

Bước 2: Tính $\Delta = b^2 - 4ac$

Bước 3: Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$. Giải tìm m

Bước 4: Kết luận

Ví dụ 2: Định m để phương trình $x^2 - 3x - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Giải:

Bước 1: $a=1, b=-3, c=-m$

Bước 2: $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4.1.(-m) = 9 + 4m$

Bước 3: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 & (\text{luôn đúng}) \\ 9 + 4m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4m > 0 - 9$$

$$\Leftrightarrow 4m > -9$$

$$\Leftrightarrow m > \frac{-9}{4}$$

Bước 4: Vậy với $m > \frac{-9}{4}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập tự rèn luyện

Bài 2: Định m để phương trình $5x^2 + x - 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

3. Giải phương trình trùng phương: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ với $a \neq 0$.

Cách giải:

- Bước 1:** Rút gọn về đúng dạng $ax^4 + bx^2 + c = 0$ với $a \neq 0$.

Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \geq 0$

- Bước 2:** Giải phương trình bậc hai $at^2 + bt + c = 0$, tìm ra t
- Bước 3:** Với mỗi giá trị của t thỏa mãn điều kiện $t \geq 0$, giải phương trình $x^2 = t$
- Bước 4:** Kết luận nghiệm của phương trình ban đầu

Ví dụ 3: Giải phương trình $x^4 - x^2 + 4 = -2x^4 + 8$

Giải

Bước 1: $x^4 - x^2 + 4 = -2x^4 + 8$

$$\Leftrightarrow x^4 - x^2 + 4 + 2x^4 - 8 = 0 \quad (\text{chuyển vế})$$

$$\Leftrightarrow 3x^4 - x^2 - 4 = 0 \quad (\text{rút gọn})$$

Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \geq 0$

Bước 2: Ta được phương trình bậc hai với ẩn t như sau:

$$3t^2 - t - 4 = 0 \quad (1)$$

$$(a = 3, b = -1, c = -4)$$

Giải phương trình (1)

$$\text{ta có: } \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.3.(-4) = 49 > 0$$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt:

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2.3} = -1 < 0 \text{ (loại) } (\text{So điều kiện } t \geq 0)$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2.3} = \frac{4}{3} > 0 \text{ (nhận) } (\text{So điều kiện } t \geq 0)$$

$$\text{Bước 3: Với } t = t_2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$\text{Bước 4: Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm } x_1 = \sqrt{\frac{4}{3}}, x_2 = -\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

Bài tập tự rèn luyện

Bài 3: Giải phương trình $x^4 - x^2 = 2x^4 + 4x^2 - 6$

4. Vận dụng hệ thức Vi – ét tính giá trị biểu thức liên quan đến các nghiệm x_1, x_2 của phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$):

Cách giải:

Bước 1: Xác định các hệ số a, b, c và chứng tỏ phương trình có hai nghiệm.

$$(\text{ Chứng tỏ bằng: } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } a.c < 0)$$

Bước 2: Tính tổng và tích hai nghiệm x_1, x_2 theo công thức:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Bước 3: Sử dụng các công thức biến đổi, biến đổi biểu thức cần tính giá trị làm xuất hiện tổng hai nghiệm, tích hai nghiệm rồi thay các giá trị của tổng, tích đã tính ở bước hai vào biểu thức để tính giá trị.

*** Các công thức cần nhớ:**

$$\bullet \quad x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$$

$$\text{Vậy } x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$$

•

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2]$$

$$\text{Vậy } x_1^3 + x_2^3 = S \cdot (S^2 - 3P)$$

Ví dụ 4: Cho phương trình $2x^2 + 5x - 7 = 0$. Không giải phương trình:

a/ Ứng dụng hệ thức Vi-ét để tính tổng hai nghiệm, tích hai nghiệm của phương trình.

b/ Hãy tính giá trị của biểu thức $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

Giải

$$2x^2 + 5x - 7 = 0$$

Bước 1: a) ($a = 2$; $b = 5$; $c = -7$)

• **Cách 1:** Ta có: $a.c = 2 \cdot (-7) = -14 < 0$

Vậy: phương trình có hai nghiệm phân biệt.

• **Cách 2 :** $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7)$$

$$\Delta = 81 > 0$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bước 2: Theo hệ thức Vi-ét ta có :
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{2} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-7}{2} \end{cases}$$

Bước 3: b)

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1 \cdot x_1}{x_1 \cdot x_2} + \frac{x_2 \cdot x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{x_1^2}{x_1 \cdot x_2} + \frac{x_2^2}{x_1 \cdot x_2} \quad (\text{Quy đồng mẫu})$$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 \cdot x_2} \quad (\text{cộng hai phân số cùng mẫu})$$

$$= \frac{S^2 - 2P}{P} \quad (\text{Thế } x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P \text{ và } x_1 \cdot x_2 = P)$$

$$= \frac{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{-7}{2}\right)}{\left(\frac{-7}{2}\right)} \quad (\text{Thế các giá trị của S và P ở bước 2})$$

$$= \frac{-53}{14}$$

Vậy $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{-53}{14}$

Bài tập tự luyện:

Bài 4: Cho phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$. Không giải phương trình:

a/ Ứng dụng hệ thức Vi-ét để tính tổng hai nghiệm, tích hai nghiệm của phương trình.

b/ Hãy tính giá trị của biểu thức $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$

5. Vận dụng hệ thức Vi – ét tìm m thỏa mãn biểu thức liên quan đến các nghiệm x_1, x_2 của phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) :

Cách giải:

Bước 1: Xác định các hệ số a, b, c và chứng tỏ phương trình có hai nghiệm.

$$(\text{ Chứng tỏ bằng: } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } a.c < 0)$$

Bước 2: Tính tổng và tích hai nghiệm x_1, x_2 theo công thức:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Bước 3: Sử dụng các công thức biến đổi, biến đổi biểu thức, làm xuất hiện tổng hai nghiệm, tích hai nghiệm rồi thay các giá trị của tổng, tích đã tính ở bước hai vào biểu thức. Giải tìm m.

Ví dụ 5: Cho phương trình $x^2 + m.x - 1 = 0$ (m là tham số)

a/ Chứng minh: Phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi m. Hãy tính tổng và tích hai nghiệm theo m.

b/ Tìm m sao cho phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 11$.

Giải

$$\text{Cho } x^2 + m.x - 1 = 0$$

Bước 1: a) ($a = 1$; $b = m$; $c = -1$)

$$\Delta = b^2 - 4a.c$$

$$\Delta = (m)^2 - 4.1.(-1)$$

$$\Delta = m^2 + 4 > 0 \quad \text{luôn đúng, } \forall m \in \mathbb{R}.$$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

$$\text{Bước 2: Theo hệ thức Vi-ét ta có : } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{m}{1} = -m \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1 \end{cases}$$

Bước 3: b) $x_1^2 + x_2^2 = 11$.

$$\Leftrightarrow S^2 - 2P = 11$$

$$\Leftrightarrow (-m)^2 - 2.(-1) = 11$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2 = 11$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 11 - 2$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow m = \pm \sqrt{9} \Leftrightarrow m = \pm 3$$

Vậy $m=3$, $m=-3$ thì thỏa mãn hệ thức trên.

Bài tập tự luyện:

Bài 5: Cho phương trình $x^2 + 3x - m^2 = 0$ (m là tham số)

a/ Chứng minh: Phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi m . Hãy tính tổng và tích hai nghiệm theo m .

b/ Tìm m sao cho phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 13$.